미적분의 원리가 적용되어 속도, 방향 등을 제어할 수 있는 탄두를 구현할 수 있을까?

표선고등학교 2학년 5반 14번 이름 : 정휘준

Ⅰ. 연구의 필요성 및 목적

본인은 관심사 중 하나인 슈팅게임을 컴퓨터 프로그래밍으로 구현해보다가 '미적분의 쓸모'라는 책을 찾게 되었다. 책에서 가장 인상 깊었던 부분은 로켓과 미적분에 대한 내용이었다. 본인이 구현하던 슈팅 게임에서 탄도 궤적(포물선)에 사용되는 미적분에 대해 알아볼 수 있었기 때문이다.

그 후 찾은 또 다른 책인 '이렇게 흘러가는 세상'이라는 책에서는 세계적으로 유명한 게임인 '앵그리버드' 속에 적용된 미적분과 간단한 탄도학에 대한 지식을 배울 수 있었다.

이를 기반으로 보다 현실적인 게임 개발에 활용하기 위한 '미적분의 원리가 적용되어 속도, 방향 등을 제어할 수 있는 탄두를 구현할 수 있을까?'라는 연구 주제를 선정하게 되었다.

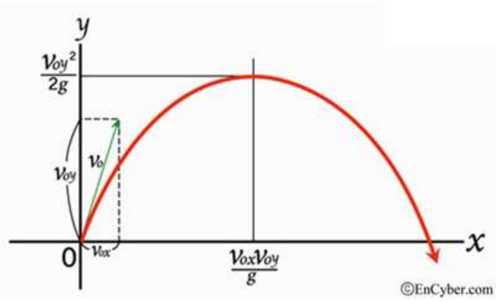
Ⅱ. 이론적 배경

1. 탄도학

총포탄·미사일·로켓·폭탄 등 비상체가 추진화약의 연소·폭발에 의해서 운동을 시작할 때부터 운동을 멈출 때까지 일어나는 여러 현상, 그 운동에 영향을 끼치는 여러 조건 등을 연구하는 분야를 말한다.

2. 포물선 운동

일정한 크기와 방향을 가지는 힘이 작용하는 공간에서 물체가 힘의 방향과 일정 각도를 이루어 던져졌을 때 그 이동 경로가 포물선을 그리는 운동이다. 수평 방향으로는 등속도 운동을 하고 수직 방향으로는 등가속도 운동을 한다. 본 연구 보고서에서는 '탄도궤적'은 포물선 형태이며, '포물선' 용어와 그 의미가 동일하고 대체 가능하다고 본다.



[그림 2] 포물선 운동

3. 탄도 미사일

발사된 후 로켓의 추진력으로 가속되어 대기권 내외 탄도를 그리면서 날아가는 미사일. 로켓의 연소로 인한 유도가 끝나면 나머지는 지구의 인력에 의한 탄도를 그리면서 날아간다. 사거리는 $700km$~$10000km$이상까지 다양하며 속도는 마하 4~7 또는 그 이상이다.

4. 수학적 개념의 정의

가. 미분

함수의 아주 작은 변화값을 나타내는 무한소를 말한다. $f(x)$를 미분한 것은 $f'(x) = y' = \dfrac{dy}{dx}$ 라고 한다.

$f(x) = x^n$을 미분한 것은 $f'(x) = nx^{n+1}$이다.

나. 적분(법)

주어진 함수의 원시함수를 구하는 것으로서, 정적분을 구하는 것을 그 함수를 적분한다고 한다. 적분법은 그 계산법을 말한다. $f(x)$를 적분한 것은 $\int f(x)dx = F(x) + C$이며, $\int f'(x)dx = f(x) + C$이다.

다. 부정적분

원시함수라고도 하며, x로 미분하여 $f(x)$가 되는 함수 y가 있을 때 이 함수 y. $f(x)$를 적분한 것은 $\int f(x)dx = F(x) + C$로 표시된다.

라. 역삼각함수

삼각함수의 역함수로 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\mathrm{cosec}\,x$, $\sec x$, $\cot x$의 역함수를 각각 $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$,⋯, $\cot^{-1}x$ 또는 $\arcsin x$, $\arccos x$,⋯, $\mathrm{arc}\cot x$('인버스사인 x' 또는 '아크사인 x' 등과 같이 읽는다)로 나타내고, 역사인, 역코사인,⋯, 역코탄젠트라고 한다.

마. 삼각함수의 배각공식

삼각함수의 덧셈정리로부터 유도되는 공식으로서 $2a$의 삼각함수를 a의 삼각함수로 나타낸 공식.

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a,\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a,\ \tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

III. 연구 방법

1. 변수 정의하기

공기저항을 무시한 포물선 운동을 수평 방향에서는 등속 운동을 하고 수직 방향에 대해서는 등가속도 운동을 한다고 가정할 때, 물체를 던진 초기의 속도를 v_0, 수평 방향으로의 속도를 v_x라고 하면 등가속도 운동을 하므로 $v_x = v_0\cos\theta$, 수직 방향으로의 속도를 v_y라고 하고 포물선 운동을 하는 물체에 작용하는 유일한 힘은 아래로 작용하는 중력이며 물체에 아래로 가속을 주므로 $v_y = v_0\sin\theta - 0.0098t$이다. 여기서 중력가속도는 $9.8m/s^2$이지만 포물선 운동을 하게 되는 미사일 속도의 단위는 마하($Mach$)이고 $1\,Mach = 0.3403\,km/s$이므로 중력가속도도 $g = 0.0098km/s^2$로 계산하였다.

v_x를 시간 t에 대하여 적분하여 x좌표를 계산하면 $\int v_x\,dt = v_0 t\cos\theta = x(t)$ 이고, v_y를 시간 t에 대하여 적분하여 y좌표를 계산하면 $\int v_y\,dt = v_0 t\sin\theta - 0.0049t^2 = y(t)$이다.

2. 도달 거리를 입력받은 그래프

입력받을 임의의 수 R을 이용하여 초기각 θ를 찾고 미사일의 비행시간을 계산해 보았다. 먼저 y의 최댓값인 H를 구하기 위하여 y의 극값을 찾아보았다. y를 t에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dt}=0$을 만드는 $t_M(t_M>0)$를 찾아 $H=y(t_M)$이라고 정한다. 이하 미사일의 속도는 마하 10으로 정한다.

$$\frac{dy}{dt} = v_0\sin\theta - 0.0098t = 0$$

$t = \frac{v_0\sin\theta}{0.0098} = t_M$일 때 $y(t_M) = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2\times 0.0098} = H$

또한 $t_M = \frac{v_0\sin\theta}{0.0098}$일 때 $x(t_M) = \frac{R}{2}$이고 $x(2t_M) = R$ $\therefore$ 도달시간 $t = \frac{v_0\sin\theta}{0.0049}$

$\therefore\ R = \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{0.0049} = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{0.0098}$ (배각공식, $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$를 이용함)

$$\theta = \left(\arcsin\frac{R\times 0.0098}{v_0}\right)\div 2$$

$v_0(km/s)$	$R(km)$	$\theta(^\circ)$	$t(s)$
3.4	300	7.37	89
3.4	500	12.54	150
3.4	800	21.35	253
3.4	1100	34.42	392

[표 1] v_0가 일정할 때 도달 거리 R을 입력받아 θ, t를 계산한 예

3. 도달 거리와 도달 시간를 입력받은 그래프

R과 t를 입력받아 발사각(θ)과 미사일 초기속도(v_0)를 계산할 수 있다.

$$t = \frac{v_0 \sin\theta}{0.0098} \times 2, \ v_0 \cos\theta = 0.0049 \times t$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{0.0049}, \ v_0 \sin\theta = \frac{R}{t}$$

$$\left(\frac{R}{t}\right)^2 + (0.0049t)^2 = v_0^2 \quad \because \ v_0^2 \sin^2\theta + v_0^2 \cos^2\theta = v_0^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{R}{t}\right)^2 + (0.0049t)^2} = v_0$$

$R(km)$	$t(s)$	$v_0(km/s)$	$\theta(^\circ)$
300	50	6.0	2.29
500	100	5.02	5.57
800	200	4.19	13.30
1100	300	3.95	21.71

[표 2] 도달 거리 R과 도달 시간 t을 입력받아 v_0, t를 계산한 예

4. 도달 거리과 각도를 입력받은 그래프

R과 θ를 입력받아 v_0와 도달시간을 계산한다.

$$R = \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{0.0049} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{0.0098}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{R \times 0.0098}{\sin 2\theta}}$$

$$t = \frac{v_0 \sin\theta}{0.0098} \times 2$$

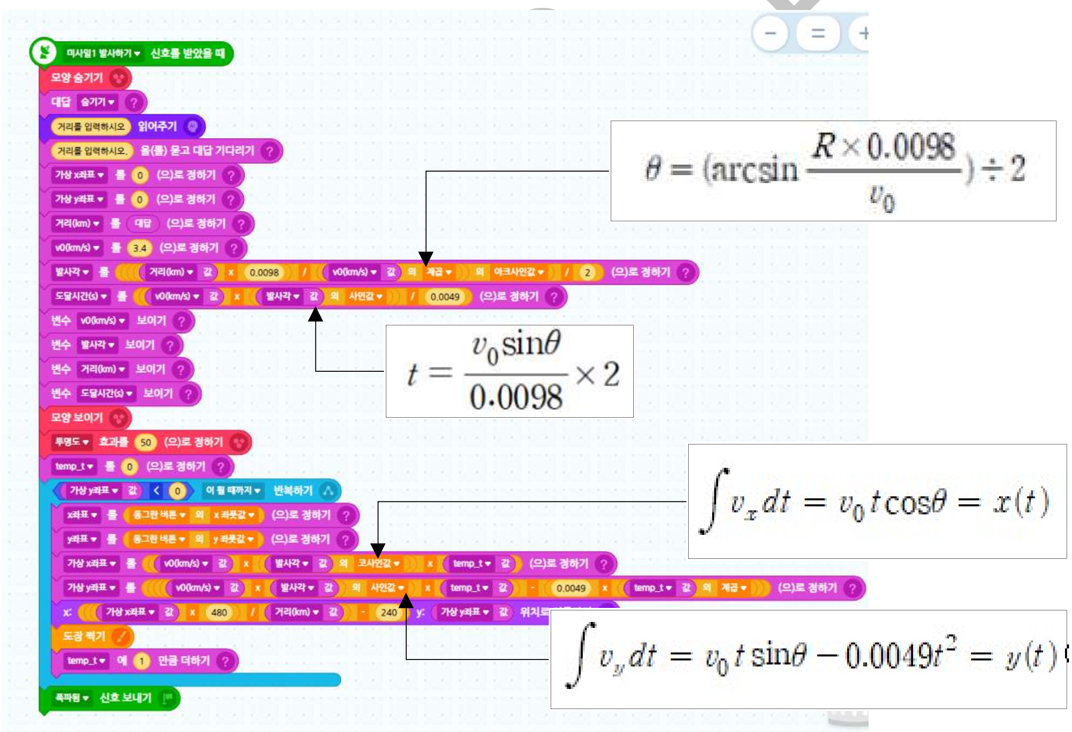
$R(km)$	$\theta(^\circ)$	$v_0(km/s)$	$t(s)$
300	20	2.14	149
500	25	2.53	218
800	30	3.0	306
1100	35	3.39	397

[표 3] 도달 거리 R과 발사각 θ를 입력 받아 v_0, t를 계산한 예

IV. 연구 결과

1. 엔트리를 통한 탄도궤적 그래프 구현

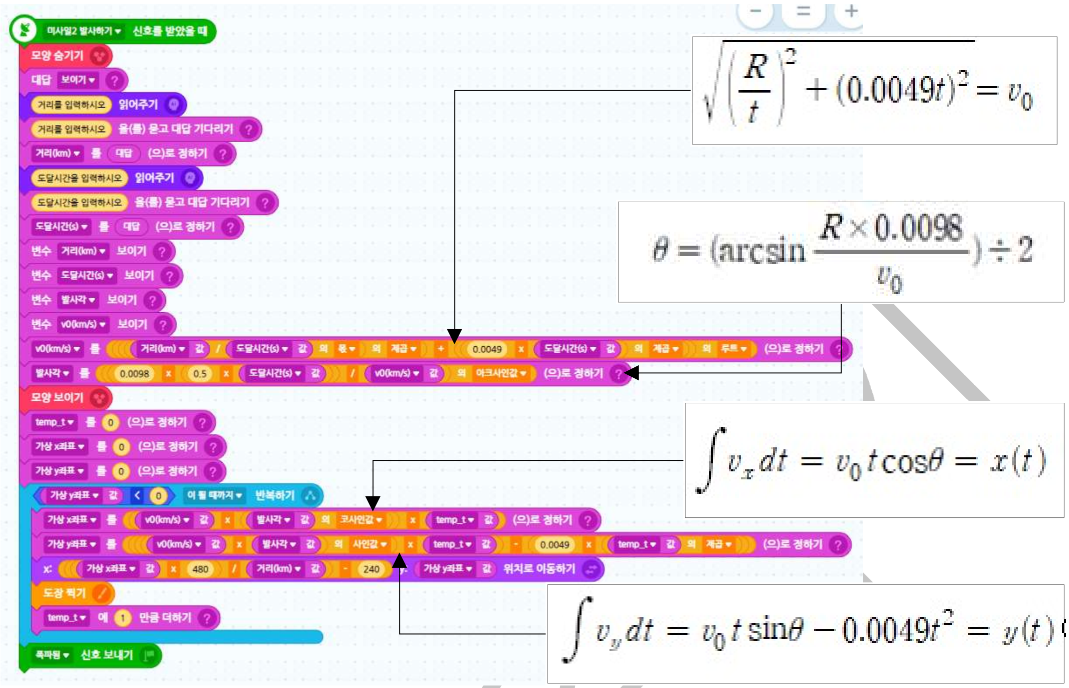
블록 코딩 사이트 엔트리에서 위의 과정을 통해 그려지는 탄도궤적 그래프를 구현했다. 사용자는 시작 화면에서 그래프의 종류(도달 거리 입력, 도달 거리 및 도달 시간 입력, 도달 거리 및 발사각 입력)를 선택하고 적절한 값을 입력하면 그래프가 그려지고 입력한 값 외의 계산된 나머지 변수들도 나타난다.



[그림 3] 도달 거리를 입력받은 그래프의 엔트리 코드

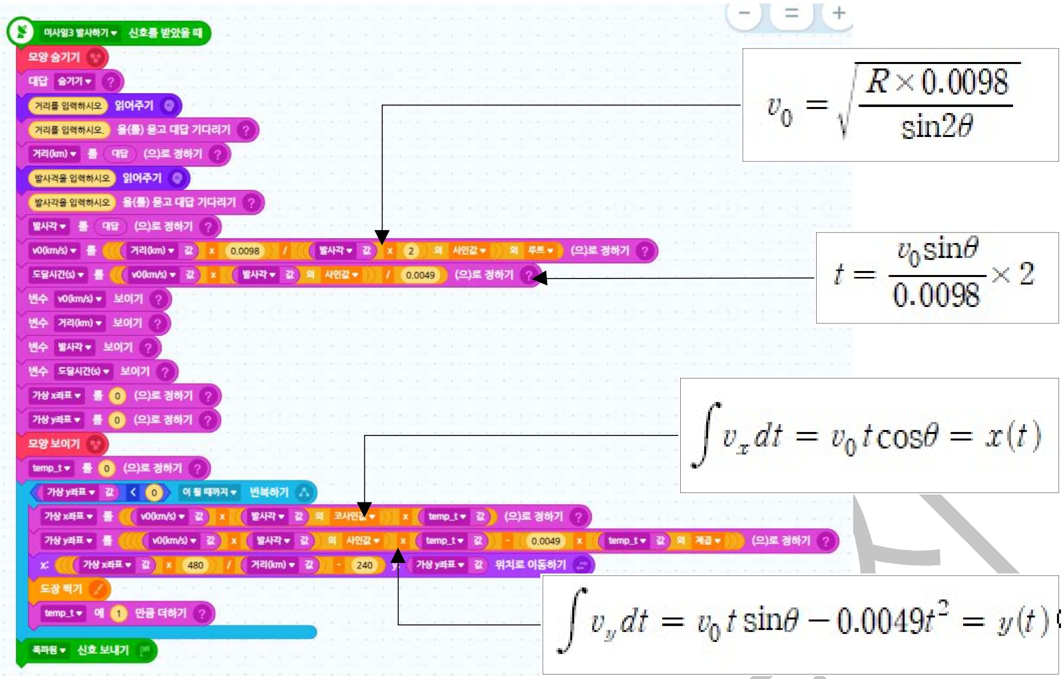
임의로 정한 초기 속도 v_0와 입력받은 도달 거리 R을 $\theta = (\arcsin\frac{R\times0.0098}{v_0})\div2$에 대입하여 발사각 θ를 구하였다. y의 최댓값에 도달하는 최대높이 도달 시간 $t_M = \frac{v_0\sin\theta}{0.0098}$을 구하고 $t = 2t_M$이므로 $x(2t_M) = R$을 이용해 도달 시간 t를 계산하였다. 한편, 출발 시점에서부터 t에 이르기까지 $x(t), y(t)$를

탄두의 좌푯값으로 사용하여 궤도를 표현하였다.



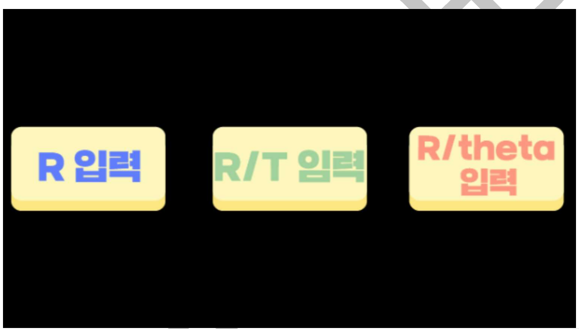
[그림 4] 도달 거리와 도달 시간를 입력받은 그래프의 엔트리 코드

도달 거리 R, 시간 t를 $\sqrt{\left(\frac{R}{t}\right)^2 + (0.0049t)^2} = v_0$에 대입하여 초기 속도 v_0를 구하였다. 입력받은 R과 계산된 v_0를 $\theta = (\arcsin \frac{R \times 0.0098}{v_0}) \div 2$에 대입하여 발사각 θ를 계산하였다. $x(t), y(t)$를 탄두의 좌푯값으로 사용하여 궤도를 표현하였다.



[그림 5] 도달 거리와 발사각을 입력받은 그래프의 엔트리 코드

도달 거리 R, 도달 시간 t를 $\sqrt{\left(\frac{R}{t}\right)^2 + (0.0049t)^2} = v_0$에 대입하여 초기 속도 v_0를 구하였다. v_0, 발사각 θ를 $t_M = \frac{v_0 \sin\theta}{0.0098}$에 대입하고 $x(2t_M) = R$을 이용해 t를 계산하였다. $x(t), y(t)$를 탄두의 좌푯값으로 사용하여 궤도를 표현하였다.



[그림 6] 프로그램 시작 화면

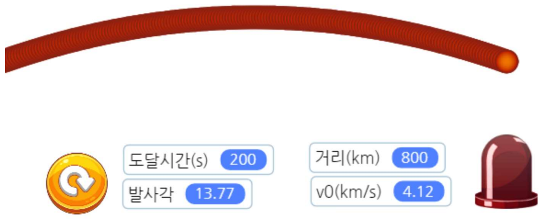
[그림 7] 변수 입력 화면

[그림 8] 도달 거리 800을 입력한 그래프

[그림 9] 위 아이콘 더블 클릭

도달 거리 800으로 입력, 초기 속도를 임의로 정하였고 도달 시간, 발사각은 계산되었다. 각 그래프 옆

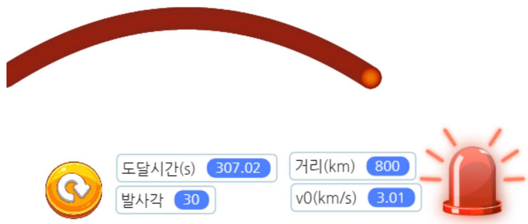
그림의 영상에서 궤도가 그려지는 과정을 알 수 있다.



[그림 10] 도달 거리 800, 도달 시간 200을 입력한 그래프

[그림 11] 위 아이콘 더블 클릭

도달 거리 800으로 입력, 도달 시간을 200으로 입력하였고 초기 속도, 발사각은 계산되었다.



[그림 12] 도달 거리 800, 발사각 30을 입력한 그래프

[그림 13] 위 아이콘 더블 클릭

도달 거리 800으로 입력, 발사각을 30으로 입력하였고 도달 시간, 초기 속도는 계산되었다.

V. 결론 및 제언

1. 결론

본 연구에서는 포물선(탄도궤적) 운동의 수직운동과 수평운동을 구분하고, 각 운동들에 대해 미분, 적분, 삼각함수 등 수학적 개념을 활용하여 탄도궤적에 대한 이차함수를 유도하였다. 또한, 유도된 이차함수식을 이용하여 물체의 특정 거리, 시간, 발사각을 계산하였고, 발사되는 탄도궤적 그래프를 엔트리 프로그래밍으로 표현하였다.(단, 실험구현을 위해 공기 저항은 무시하고 미사일의 디폴트 속도는 마하 10으로 한다고 가정.)

구체적으로 탄두의 속도를 적분하여 탄두의 위치를 나타내는 x,y좌표를 구하였고, 이차함수로 표현되는 y좌표의 극값을 구하기 위하여 t(시간)에 대해 미분하였다. 발사각을 계산하는 과정에서 삼각함수의 배각공식과 삼각함수의 역함수라는 수학적 개념이 필요하였다.

본 연구에서는 탄두의 목표와의 거리, 그 외 옵션(도달 시간, 발사각) 등 기본적인 값만 가지고도 도달 시간, 발사각, 속도를 계산할 수 있다는 결과를 얻었고, 이는 탄두 발사 방향과 속도를 제어하는 탄도 미사일 시스템에 활용 가능하며, 결론적으로 본 연구의 주제인 ‘미적분의 원리가 적용되어 속도, 방향 등을 제어할 수 있는 탄두를 구현할 수 있을까?’라는 의문에 대한 해답을 제시할 수 있었다.

2. 제언

본 연구에서 사용된 삼각함수의 배각공식과 삼각함수의 역함수는 아직 배우지 않은 수학적 개념들이라 연

구 진행을 위해 개인적으로 공부하여 활용하였다.

본 연구에는 실험구현을 위해 공기 저항을 무시하고, 미사일의 디폴트 속도를 마하10으로 가정하였고 [표 2]에서 알 수 있듯이 탄도 미사일의 발사각이 약 2°로 매우 낮을 때가 있는데, 이들을 현실에 적용한다면 공기 저항, 속도 변화, 높은 장애물이 있는 경우 문제가 될 수 있다. 또한, 최고 높이가 너무 높을 경우 레이더에 쉽게 걸려 미사일이 격추당할 수 있다는 점도 개선할 필요가 있다. 본 연구와 관계없이 본인이 제시하는 개선책들은 공기흐름(바람 등)의 속도를 수평/수직 방향으로 나눠서 탄도의 속도에 더하거나 빼고, 미사일 속도 설정 기능을 넣고, 도달 거리, 도달 시간, 발사각을 입력받되, 발사각이 특정 수치보다 낮을 때 그 수치 이상으로 고정해주도록 프로그램을 수정하고, 미사일이 그래프 상에서 레이더에 걸릴 만한 특정 높이에 도달하면 그 점에서 그래프 상에서 높이가 다시 특정 높이 이하가 되는 점까지를 직선 비행 구간으로 정하는 방법이 있다.

참 고 문 헌

홍성복, 이중권, 신태교, 이채형, 이병하, 신용우, 전형숙, 김형균, 권백일, 최원숙, 강인우 (2018). 고등학교 수학 교과서. 서울: 지학사.

허선. (2022). IB 수학 HL 2.

“탄도학” (표기없음). Doopedia, 검색일 : 2022.10.2. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000863253

“미분” (표기없음). Doopedia, 검색일 : 2022.10.2. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000709737

“적분법” (표기없음). Doopedia, 검색일 : 2022.10.2. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000895461

“포물선 운동” (표기없음). Doopedia. 검색일 : 2022.10.2. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000907419

“부정적분” (표기없음). Doopedia. 검색일 : 2022.11.23. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000844928

“탄도 미사일” (표기없음). Doopedia, 검색일 : 2022.11.30.. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000732618

“마하” (표기없음). Doopedia, 검색일 : 2022.11.30.. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000839916

“역삼각함수” (표기없음). Doopedia, 검색일 : 2022.11.30.. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000711568

“배각공식” (표기없음). Doopedia, 검색일 : 2022.11.30.. URL :
https://www.doopedia.co.kr/doopedia/master/master.do?_method=view&MAS_IDX=101013000797018